

# Poznámky ke 4. cvičení z PST

Matěj Novotný

20.4.2015

**G1** Určete rozptyly veličin  $X, Y$  z minulého cvičení. *Distribuční funkce  $X, Y$  jsou zde*

$$a) F_X(u) = \begin{cases} \frac{e^u}{2} & u < 0, \\ \frac{1+u}{2} & u \in [0, 1), \\ 1 & u \geq 1, \end{cases} \quad b) F_Y(u) = \begin{cases} 0 & u < -3, \\ \frac{1}{4} & -3 \leq u < -1, \\ \frac{7}{8} & -1 \leq u < 2, \\ 1 & u \geq 2. \end{cases}$$

**Řešení** Z minulého cvičení máme spočítáno  $\mathbb{E}X = \frac{-1}{4}$ ,  $\mathbb{E}Y = \frac{-9}{8}$ . Stejně tak máme spočítanou hustotu  $f_X$  a pravděpodobnostní funkci  $p_Y$ . V prvním případě je

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_X(u) du = \int_{-\infty}^0 u^2 \frac{e^u}{2} du + \int_0^1 u^2 \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} u^2 \cdot 0 du = \text{dopočítat.}$$

Z toho pak vyjde rozptyl. V druhém případě je

$$\mathbb{E}Y^2 = \sum_{Y=u} u^2 p_Y(u) = (-3)^2 \frac{1}{4} + (-1)^2 \frac{5}{8} + 2^2 \frac{1}{8} = \text{dopočítat.}$$

To samé.

**G2** Náhodná veličina  $X$  má hustotu

$$a) f_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ u^{-2} & u \geq 1. \end{cases} \quad b) f_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \vee u \geq 1 \\ c\sqrt{1-u^2} & u \in [-1, 0), c \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & u \in [0, 1). \end{cases}$$

Napište předpis distribuční funkce  $F_X$ . Určete  $\mathbb{E}X$ , var  $X$ .

**Řešení** a) Integrací hustoty dostaneme  $F_X$ :

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ \int_1^u \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{u} & u \geq 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du = \int_1^{\infty} \frac{u}{u^2} du = \dots = \infty$$

Z toho plyne, že var  $X$  neexistuje.

b) Všimněte si, že graf  $\sqrt{1-u^2}$  je část jednotkové kružnice. Protože  $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$ , musí být  $c = \frac{2}{\pi}$ . Distribuční funkce je pracnější na výpočet integrálu, lze použít substituci  $\sin x = u$  nebo  $\frac{1-u}{1+u} = x$ . Zároveň platí, že na intervalu  $[0, 1)$  musí být  $F_X$  rovna  $\frac{1}{2} + \frac{u}{2}$ , a konstanta  $\frac{1}{2}$  tu vznikla integrací té části kruhu mezi

-1 a 0.

**G3** Z kruhu o poloměru  $a > 0$  vybereme náhodně bod (předpokládáme rovnoměrné rozdělení). Náhodná veličina  $X$  je rovna vzdálenosti bodu od středu. Určete její rozdělení  $X$ , včetně střední hodnoty a rozptylu.

**Řešení** Po použití selského rozumu v kombinaci s obrázkem vidíme, že distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \mathbf{P}(X \leq u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{\pi u^2}{\pi a^2} = \frac{u^2}{a^2} & u \in [0, a) \\ 1 & u \geq a. \end{cases}$$

Tedy

$$\mathbb{E}X = \int_0^a u \frac{2u}{a^2} du = \left[ \frac{2u^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{2a}{3}$$

a

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^a u^2 \frac{2u}{a^2} du = \left[ \frac{u^4}{2a^2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2},$$

tudíž  $\text{var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{a^2}{18}$ .